Конспект лекций студентов

Handbook on

«Динамика твердого тела (динамика пространственного движения космических аппаратов)».

Выполнено на базе электронных конспектов студентов гр. М1128

Ерёменко А., Недовесова М.

Самара, СГАУ 2015г.

Электронные конспекты включают фрагменты электронных (оцифрованных) версий учебников под авторством Н.Н. Бухгольца, Ю.А. Архангельского, В.В. Голубева и некоторых других авторов.

Случай Эйлера.

Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки под действием сил, момент которых относительно этой точки равен нулю, носит название движения вокруг неподвижной точки по инерции. Таким образам, Эйлеров случай служит частным случаем движения по инерции, когда тело весомое, а точка опоры совпадает с центром масс.

Пусть при движении тела одна из его точек O все время остается неподвижной. Для получения уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Если ***Ko*** и ***Mo*** кинетический момент тела и главный момент внешних сил относительно неподвижной точки О, то:

$$\frac{dKo}{dt} = Mo^{(e)} \quad (1)$$

Пусть $Oxyz$ - подвижная система координат, жестко связанная с телом, а p, q, r - проекции угловой скорости тела на ее оси. Тогда компоненты вектора Ko выражаются через величины p,q,r и элементы тензора инерции тела для точки O - по формулам.

Если абсолютную производную вектора Ko выразить через его локальную производную, то уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{dKo}{dt} + \omega \times Ko = Mo^{(e)} \quad (2)$$

Пусть Mx, My, Mz,-проекции вектора $Mo^{(e)}$ на оси Ox, Oy, Oz.

Тогда векторное уравнение (2) запишется в виде следующих скалярных уравнений:

$$J_x p - J_{xy} q - J_{xz} r + (J_z - J_y) * qr + J_{xz}(r^2 + q^2) + p(J_{xy} r - J_{xz} q) = Mx,$$
$$-J_{xy} p + J_x q - J_{xz} r + (J_x - J_z) * rp + J_{xz}(p^2 - r^2) + q(J_{yz} p - J_{xz} r) = My$$
(3)
$$-J_x p - J_{yz} q + J_z r + (J_y - J_x) * pq + J_{xy}(q^2 - p^2) + r(J_{xz} q - J_{yz} p = Mz$$

Эти уравнения существенно упрощаются, если оси *Ox*, *Oy, Oz* - главные оси инерции тела для точки *О.* В этом случае $J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}$=О, а *Jx*, *Jy*, *Jz* являются главными моментами инерции: $J_x = A$, $J_y = B$, $J_z = C$. Уравнения (3) примут вид

$$A\, dp/dt + (C - B)qr = M_x,$$
$$B\, dq/dt + (A - C)rp = M_y, \qquad (4)$$
$$C\, dr/dt + (B - A)pq = M_z.$$

Уравнения (4) называются *динамическими уравнениями Эйлера.* Если M_x, M_y, M_z - функции p, *q*, r, t, то уравнения (4) образуют замкнутую систему уравнений, интегрирование которой даст зависимость величин p, q, *r* от времени *t* и начальных условий p_0,qo,r0 После этого из кинематических уравнений Эйлера

$$p = \dot{\Psi} sin\theta sin\varphi + \dot{\theta} cos\varphi$$
$$q = \dot{\Psi} sin\theta cos\varphi - \dot{\theta} sin\varphi$$
$$r = \dot{\Psi} cos\theta + \dot{\varphi}$$

можно найти углы p,q,r как функции времени и начальных условий.

Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки распадается на две последовательные задачи интегрирования систем трех уравнений первого порядка. В общем же случае величины M_x, M_y, M_z являются функциями времени, углов Эйлера и их производных. Тогда уравнения (4) и (5) надо интегрировать совместно.

Наиболее простым и очень важным случаем является тот, когда момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю. Тогда говорят, что имеет место *случай Эйлера* движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Этот случай, очевидно, возможен, когда внешних сил нет совсем или тогда, когда внешние силы, приложенные к телу, приводятся к равнодействующей, проходящей через неподвижную точку. В случае Эйлера уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} &A\,dp/dt + (C - B)qr = 0, \\ &B\,dq/dt + (A - C)rp = 0, \\ &C\,dr/dt + (B - A)pq = 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Ниже мы рассмотрим движение тела в случае Эйлера подробно.

Первые интегралы.

Так как в случае Эйлера главный момент внешних сил относительно точки O равен нулю, то из уравнения (1) следует, что

$$Ko = \text{const}, \qquad (7)$$

т. е. кинетический момент Ko тела относительно точки O имеет неизменное направление в неподвижной системе отсчета и величина его постоянна.

Так как Ap, Bq, Cr- проекции вектора Ko на главные оси инерции тела Ox, Oy, Oz, а K_Q - квадрат длины вектора Ko, то из (7) следует первый интеграл

$$Ko^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = const \qquad (8)$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии можно получить, что кинетическая энергия тела также постоянна. Действительно, так как

$$dT = Mo^e * \omega\, dt + R^e * \vartheta o\, dt,$$

а $\vartheta o=0$ и $Mo^e = 0$, то $dT=0$. Поэтому существует первый интеграл

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = const \qquad (9)$$

Существование первых интегралов (8) и (9) можно установить и непосредственно из системы уравнении (6). Действительно, если первое уравнение системы (6) умножить на Ap, второе на Bq, а третье на Cr и результаты сложить, то получим

$A^2 pp + B^2 qq + C^2 rr = 0$,откуда следует первый интеграл (8).

Если же первое, второе и третье уравнения умножить соответственно на p, q, r, то после сложения получим

$App + Bqq + C\,rr = 0$, откуда вытекает первый интеграл (9).

Далее представлены в 3Д углы Эйлера

Случай Лагранжа

В случае Лагранжа моменты инерции A и B равны, а сила тяжести действует вдоль оси z.

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-A)\,qr &= -Mgz_0\,\gamma', \\ A\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp &= Mgz_0\,\gamma, \\ C\frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$\gamma 1, \gamma 2, \gamma 3$ находятся по следующим формулам.

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{z,\ x}) &= \gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \\ \cos(\widehat{z,\ y}) &= \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \\ \cos(\widehat{z,\ z}) &= \gamma_3 = \cos\theta. \end{aligned}\right\}$$

$$z^0 = \gamma_1 \boldsymbol{i} + \gamma_2 \boldsymbol{j} + \gamma_3 \boldsymbol{k}.$$

$$\frac{\tilde{d} z^0}{dt} = -\omega \times z^0 = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Кинематические уравнения Пуассона

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma_1}{dt}&=r\gamma_2-q\gamma_3,\\ \frac{d\gamma_2}{dt}&=p\gamma_3-r\gamma_1,\\ \frac{d\gamma_3}{dt}&=q\gamma_1-p\gamma_2.\end{aligned}\right\}$$

Найдем первые интегралы

1) $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$

2)Далее воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$dT=-P\,d\zeta_C,$$

где ζ_C есть координата центра тяжести относительно основной системы отсчета. Очевидно, что $\zeta_C=(\boldsymbol{a})_\zeta=a\gamma_3$. Интегрируя и заменяя кинетическую энергию T ее выражением (7′) § 15, получим интеграл эıергии

$$A(p^2+q^2)+Cr^2=-2Pa\gamma_3+h; \tag{3}$$

3)Применим теорему об изменении кинетического момента системы

$$\frac{d}{dt}(G_\zeta)=0,$$

поскольку $M_\zeta=0$; следовательно,

$$G_\zeta=\text{const}.$$

Но так как

$$G_\zeta=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\zeta}^0=(Ap\boldsymbol{i}+Aq\boldsymbol{j}+Cr\boldsymbol{k})\cdot(\gamma_1\boldsymbol{i}+\gamma_2\boldsymbol{j}+\gamma_3\boldsymbol{k})=$$
$$=A(p\gamma_1+q\gamma_2)+Cr\gamma_3,$$

то окончательно будем иметь

$$A(p\gamma_1+q\gamma_2)+Cr\gamma_3=\text{const}. \tag{4}$$

4)Этот интеграл следует из третьего уравнения системы динамических уравнений Эйлера

$r=\text{const}.$

Далее совершая алгебраические преобразования, приводя подобные члены и т.д находим значение всех неизвестных функций.

$\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi=r=\text{const}.$

$$\dot{\psi} = \frac{b - Cr\cos\theta}{A\sin^2\theta}.$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h_1 - 2Pa\cos\theta}{A} - \frac{(b - Cr\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta}.$$

$$p\gamma_1 = \dot{\psi}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi,$$
$$q\gamma_2 = \dot{\psi}\sin^2\theta\cos^2\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi.$$

$$r = \mathrm{const}.$$

Углы прецессии и собственного вращения можно найти в квадратурах от эллиптических функций.

Случай Ковалевской

Особенностью этого случая является то что A=B=2C и то что сила тяжести Mg действует с некоторым смещением от цента по оси Ox.

Динамические уравнения Эйлера примут следующий вид

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} &= qr, \\ 2\frac{dq}{dt} &= -pr - c\gamma'', \\ \frac{dr}{dt} &= c\gamma', \end{aligned}\right\}$$

Здесь $c = \frac{Mg\,x_0}{C}$, x_0-плечо силы тяжести

И кинематические уравнения в переменных Пуассона

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\ \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'. \end{aligned}\right\}$$

4 первых интеграла для системы уравнений Эйлера

$$\left.\begin{aligned} 2(p^2+q^2)+r^2&=2c\gamma+6l_1,\\ 2(p\gamma+q\gamma')+r\gamma''&=2l,\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2&=1,\\ [(p+qi)^2+c(\gamma+i\gamma')]\,[(p-qi)^2+c(\gamma-i\gamma')]&=k^2. \end{aligned}\right\}$$

4й интеграл можно записать в следующем виде

$$(p^2+q^2+c\gamma)^2+(2pq+c\gamma')^2=k^2.$$

Далее С.В.Ковалевская вводит новые перемене вместо переменных $p,\ q,\ \gamma$ и γ'.

$$\left.\begin{aligned} x_1&=p+qi,\\ x_2&=p-qi, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1&=(p+qi)^2+c(\gamma+i\gamma'),\\ \xi_2&=(p-qi)^2+c(\gamma-i\gamma'), \end{aligned}\right\}$$

Последнюю систему уравнений можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi_1&=x_1^2+c(\gamma+i\gamma'),\\ \xi_2&=x_2^2+c(\gamma-i\gamma'). \end{aligned}\right\}$$

После длительных алгебраических операций можно перезаписать систему уравнений в виде.

$$\left.\begin{aligned} r^2&=6l_1-(x_1+x_2)^2+\xi_1+\xi_2,\\ cr\gamma''&=2cl+x_1x_2(x_1+x_2)-x_2\xi_1-x_1\xi_2,\\ c^2\gamma''^2&=c^2-k^2-x_1^2x_2^2+\xi_1x_2^2+\xi_2x_1^2.\\ \xi_1\xi_2&=k^2. \end{aligned}\right\}$$

Далее выражая переменные r и γ'' получим следующую систему

$$\begin{aligned} E&=6l_1-(x_1+x_2)^2,\\ F&=2cl+x_1x_2(x_1+x_2),\\ G&=c^2-k^2-x_1^2x_2^2. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки запишем функции R(x1), R(x2) и R(x1,x2)

$$R(x_1) = x_1^2 E + 2x_1 F + G = -x_1^4 + 6l_1 + 4clx_1 + c^2 - k^2, \qquad (4)$$

и замечая симметричность уравнения (3) относительно ξ_1 и ξ_2, с одной стороны, и относительно x_1 и x_2, с другой стороны, напишем уравнение (3) в виде

$$R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2 + EG - F^2 + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0. \qquad (5)$$

Введем еще следующие обозначения:

$$R(x_1, x_2) = Ex_1x_2 + F(x_1 + x_2) + G, \qquad (6)$$

$$R_1(x_1, x_2) = EF - G^2 = -6l_1x_1^2x_2^2 - (c^2 - k^2)(x_1 + x_2)^2 - \\ - 4lc(x_1 + x_2)x_1x_2 + 6l_1(c^2 - k^2) - 4l^2c^2 \qquad (7)$$

и преобразуем выражение

$$R(x_1)R(x_2) - R(x_1, x_2)^2.$$

После исключения r и γ'' у нас осталась система уравнений

$$\left.\begin{aligned} R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2 + R_1(x_1, x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0, \\ \xi_1\xi_2 = k^2, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Из этих уравнений можно выразить переменные , x_1 и x_2. ξ_1 и ξ_2

Однако С. В. Ковалевская идет в дальнейших вычислениях несколько иным путем. Уравнения (14) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \alpha\xi_1+\beta\xi_2&=\gamma,\\ \xi_1\xi_2&=k^2. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Очевидно, что для их решения можно поступить следующим образом. Переписав их в виде

$$(\sqrt{\alpha}\sqrt{\xi_1})^2+(\sqrt{\beta}\sqrt{\xi_2})^2=\gamma$$

и

$$2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\xi_1\xi_2}=2\sqrt{\alpha\beta}\,k,$$

можно свести уравнения (15) к уравнениям

$$\{\sqrt{\alpha}\sqrt{\xi_1}\pm\sqrt{\beta}\sqrt{\xi_2}\}^2=\gamma\pm2\sqrt{\alpha\beta}\,k. \tag{16}$$

Подставляя в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \alpha&=R(x_2),\\ \beta&=R(x_1),\\ \gamma&=-R_1(x_1,\ x_2)-k^2(x_1-x_2)^2, \end{aligned}$$

В итоге получим уравнение

$$\left\{\sqrt{\xi_1}\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}\pm\sqrt{\xi_2}\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1-x_2}\right\}^2= -\frac{R_1(x_1,\ x_2)}{(x_1-x_2)^2}\pm2k\frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}-k^2. \tag{17}$$

А так же найдем корни этого уравнения

$$w_1=\frac{R(x_1,\ x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2},$$

$$w_2=\frac{R(x_1,\ x_2)+\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}.$$

Основное уравнение С.В.Ковалевской

$$w^2-\frac{2R(x_1,\ x_2)}{(x_1-x_2)^2}w-\frac{R_1(x_1,\ x_2)}{(x_1-x_2)^2}=0.$$

Уравнение С. В. Ковалевской (21), имеющее в дальнейшем основное значение, можно написать в виде

$$(x_1-x_2)^2 w^2 - 2R(x_1, x_2) w - R_1(x_1, x_2) = 0. \tag{24}$$

Назовем его левую часть через $Q(w, x_1, x_2)$, так что

$$Q(w, x_1, x_2) = (x_1-x_2)^2 w^2 - 2R(x_1, x_2) w - R_1(x_1, x_2).$$

Далее следуют упрощения перегруппировка и т.д.

Таким образом, выделяя то или иное переменное, мы можем написать $Q(w, x_1, x_2)$ в следующих трех видах:

$$\left.\begin{aligned} Q(w, x_1, x_2) &= Kw^2 + Lw + N, \\ Q(w, x_1, x_2) &= K_1x_1^2 + L_1x_1 + N_1, \\ Q(w, x_1, x_2) &= K_2x_2^2 + L_2x_2 + N_2, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где K, L, N — многочлены относительно x_1 и x_2, K_1, L_1, N_1 — многочлены относительно x_2 и w, K_2, L_2, N_2 — многочлены относительно x_1 и w.

С.В.Ковалевская далее вводит новые переменные

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= w_1 + 3l_1, \\ s_2 &= w_2 + 3l_1. \end{aligned}\right\}$$

Что позволяет вывести новую систему уравнений относительно этих переменных принимая $e_4 = 3l_1 - k, \quad e_5 = 3l_1 + k,$.

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} &= -(s_1 - s_2), \\ 2\frac{R(x_1, x_2)}{(x_1-x_2)^2} &= s_1 + s_2 - 6l_1. \end{aligned}\right\}$$

Дифференциальные уравнения для x1 и x2

В качестве исходных уравнений мы возьмем уравнения

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} &= qr, \\ 2\frac{dq}{dt} &= -pr - c\gamma''. \end{aligned}\right\}$$

Помня что $x_1 = p + qi$ и $x_2 = p - qi$, получаем следующее

$$
\left.\begin{aligned}
2\frac{dx_1}{dt} &= -i(rx_1 + c\gamma''),\\
2\frac{dx_2}{dt} &= i(rx_2 + c\gamma'').
\end{aligned}\right\}
$$

Используя равенства выведенные выше получим

$$
2\frac{dx_1}{dt} = -i\frac{\sqrt{R(x_1)}}{s_1 - s_2}\left[\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} + \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}\right], \quad (8)
$$

$$
2\frac{dx_2}{dt} = i\frac{\sqrt{R(x_2)}}{s_1 - s_2}\left[\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} - \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}\right]. \quad (9)
$$

Далее эти уравнения можно выразить в виде

$$
\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = -i\frac{\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}}{s_1 - s_2},
$$

$$
\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} - \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = i\frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}}{s_1 - s_2}.
$$

Выведем функцию Q

$$
Q(w, x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2\left[w - \frac{R(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2}\right]^2
$$

Но если при этом Q представляет собой точный квадрат относительно некоторого многочлена от w, x_1 и x_2, то, очевидно, и многочлен $K_1x_1^2 + L_1x_1 + N_1$ есть точный квадрат, а потому $\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2 = 0$. Итак, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2$ делится без остатка на $R(x_2)$, что для первого члена видно из равенства (10). Итак,

$$
\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2 = R(x_2)\varphi(w, x_2),
$$

но многочлен $\varphi(w, x_2)$ не может содержать x_2, так как $\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2$ есть многочлен четвертой степени относительно x_2 и $\varphi(w, x_2)$ — частное от деления $\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2$ на $R(x_2)$ — есть многочлен только относительно w.

Итак,

$$
\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2 = L_1^2 - 4K_1N_1 = R(x_2)\varphi(w), \quad (11)
$$

Решая, выражая, заменяя…

$$
\left.
\begin{aligned}
-\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} &= 2\frac{dw_1}{\sqrt{\varphi(w_1)}}, \\
\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} &= 2\frac{dw_2}{\sqrt{\varphi(w_2)}}.
\end{aligned}
\right\}
$$

И снова

$$
2\frac{ds_1}{\sqrt{\varphi_1(s_1)}} = -i\frac{\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}}{s_1-s_2}dt,
$$

$$
2\frac{ds_2}{\sqrt{\varphi_1(s_2)}} = -i\frac{\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}}{s_1-s_2}dt
$$

или, полагая

$$
\varphi_1(s)(s-e_4)(s-e_5) = \Phi(s),
$$

где $\Phi(s)$ — многочлен пятой степени относительно s, получим еще:

$$
2\frac{ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} = i\frac{dt}{s_1-s_2}, \tag{15}
$$

$$
2\frac{ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = -i\frac{dt}{s_1-s_2} \tag{16}
$$

и из уравнений (15) и (16) окончательно найдем:

$$
\frac{ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = 0, \tag{17}
$$

$$
\frac{s_1\,ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{s_2\,ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = \frac{i}{2}dt. \tag{18}
$$

Положим значения переменных s_1 и s_2 в начальный момент t_0 равными s_{10} и s_{20}; тогда мы можем еще написать уравнения (1) в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
\int_{s_{10}}^{s_1}\frac{ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \int_{s_{20}}^{s_2}\frac{ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} &= 0, \\
\int_{s_{10}}^{s_1}\frac{s_1ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \int_{s_{20}}^{s_2}\frac{s_2ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} &= \frac{i}{2}(t-t_0).
\end{aligned}
\right\} \tag{2}
$$

Следовательно, для решения поставленной задачи надо из уравнений (2) найти переменные s_1 и s_2 как функции t. Как было показано выше, многочлен $\Phi(s)$ есть многочлен пятой степени.

Интегралы вида

$$
\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx,
$$

где R есть рациональная функция от x и $w = \sqrt{P(x)}$, а многочлен $P(x)$ есть многочлен степени выше четвертой, называются в общем случае гиперэллиптическими; в частном случае, когда $P(x)$ есть многочлен пятой или шестой степени, соответствующие интегралы иногда носят название ультраэллиптических. Таким образом, решение задачи С. В. Ковалевской приводится к обращению системы ультраэллиптических интегралов, определяемых уравнениями (2).

Итак, во всех разобранных выше случаях интегрирование дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела приводится к задаче обращения эллиптических или гиперэллиптических интегралов. Решению этой задачи и посвящены следующие главы.

Уравнения движения соосных КА переменной массы

Для вывода уравнений движения системы соосных тел с переменной массой воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Следует учесть тот факт, что центр масс, движется относительно тел системы вследствие изменения массы первого соосного тела. Поэтому целесообразно записывать уравнения движения в системе координат, жестко связанной с телами и имеющей начало в точке O одного из тел (в нашем случае тела 2), совпадающей с начальным положением центра масс. Введем следующие системы координат (рис.): $C\xi\eta\zeta$ - неподвижная в абсолютном пространстве система координат; $OXYZ$ – подвижная система координат с началом в точке системы O, оси которой остаются коллинеарными осям неподвижной системы все время движения; $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ – системы координат, жестко связанные соответственно с телами 2 и 1, вращающиеся относительно системы $OXYZ$.

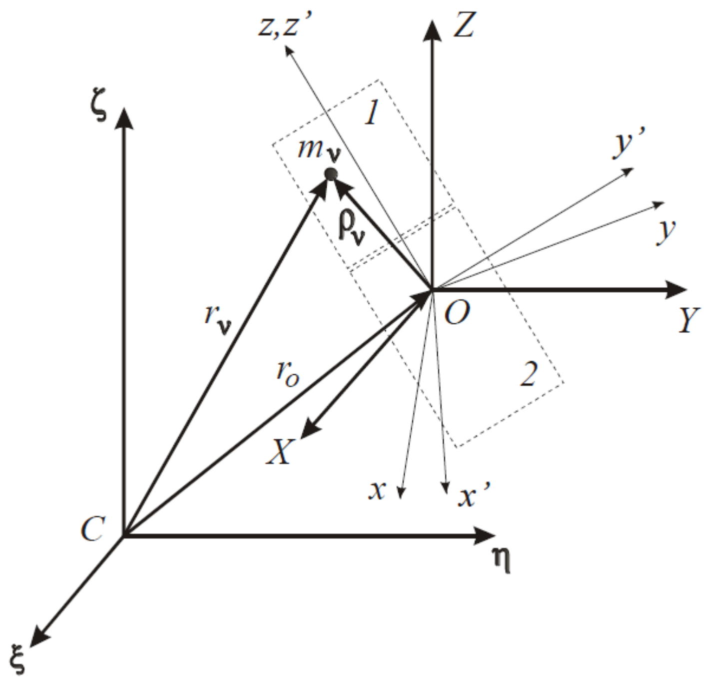


Рис. *Используемые системы координат*

Запишем кинетический момент соосных тел в неподвижной системекоординат как сумму кинетических моментов всех точек, составляющих эти тела. Из рис. видно, что

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_\nu .$$

Для построения уравнений движения, прежде всего, необходимо вычислить кинетический момент системы с переменной массой. Точки, входящие в состав системы, отличаются своей принадлежностью к телу 1 или к телу 2. При выводе уравнений будем различать принадлежность точек телам 1 и 2 индексами V*1* и V*2*. Дифференцируя выражение полученное выше по времени, для скоростей точек получим

$$\vec{v}_{v_i} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{v_i},$$

$$i = 1,2,$$

Где ω 1 и $\omega 2$ угловые скорости движения связанных с телами 1 и 2 систем координат *Ox'y'z'* и *Oxyz* соответственно.

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_{1,O} + m_1 \vec{r}_O \times \vec{v}_{C_1}^{(e)} + \vec{\rho}_{C_1} \times m_1 \vec{v}_O,$$

$$\vec{K}_2 = \vec{K}_{2,O} + m_2 \vec{r}_O \times \vec{v}_{C_2}^{(e)} + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2 \vec{v}_O$$

кинетические моменты тел 1 и 2, вычисленные отдельно в неподвижной системе координат. Запишем теорему об изменении кинетического момента системы переменной массы :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^e + \vec{M}^R + \sum_{\nu} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \ ,$$

$\overrightarrow{M^e}$-главный момент внешних сил ;

$\overrightarrow{M^R}$-главный момент реактивных сил ;

$$\sum_{\nu} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu$$

Сумма моментов количеств движений частиц, отброшенных в единицу времени и их переносом движения относительно неподвижной системы координат. С учетом теорему об изменении кинетического момента относительно системы осей *OXYZ* можно записать

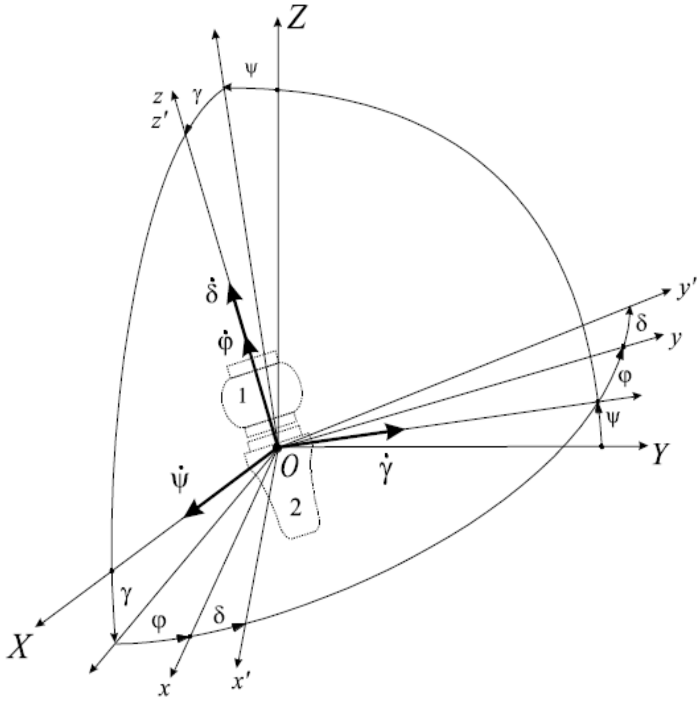
$$\frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt} + \frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt} = \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^R + \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right) +$$
$$+ \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt} \left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}\right) - \vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O .$$

После приведенных выше общих рассуждений перейдем к построению уравнений движения КА с двойным вращением как системы соосных тел, опираясь его на конкретные конструктивные особенности. Переменным помассе примем лишь тело 1, соответствующее тормозной двигательной установке. Из этого следует, что тело 2, соответствующее спускаемой капсуле, не создает реактивных сил, а также, в отличие от тела 1, не изменяет своих инерционно-массовых параметров, вычисленных в связанной с телом системе координат *Oxyz* (так как точка *O* не изменяет своего положения относительно тел). Пусть тела 1 и 2 являются динамически симметричными, и пусть в процессе изменения массы тела 1 его динамическая симметрия не нарушается. При этом центр масс системы двух тел смещается с некоторой скоростью ***qc*** строго вдоль направления продольной оси в сторону центра масс тела 2. Выберем за точку *O*, как уже отмечалось, точку, совпадающую с начальным положением центра масс системы (рис.). Предположим также, что отброс точек при выработке топлива происходит строго в направлении продольной оси без линейных и угловых эксцентриситетов тяги, и тогда моменты от реактивных сил относительно точки *O* будут отсутствовать. Запишем угловые скорости и кинетические моменты тел в проекциях на оси своих связанных систем координат:

$$\vec{\omega}_1 = p'\vec{i}\,' + q'\vec{j}\,' + r'\vec{k}\,'; \qquad \vec{\omega}_2 = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k};$$

$$\vec{K}_{1,O} = A_1(t)p'\vec{i}\,' + A_1(t)q'\vec{j}\,' + C_1(t)r'\vec{k}\,'; \qquad \vec{K}_{2,O} = A_2 p\vec{i} + A_2 q\vec{j} + C_2 r\vec{k},$$

где *Ai* и *Ci* - моменты экваториальный и продольный моменты инерции тела *i*, вычисленные в связанной с телом системе координат.



Используемая система координат и параметры ориентации

Для рассматриваемого вида относительного движения тел будем иметь следующую связь компонент угловых скоростей тел:

$$p' = p\cos\delta + q\sin\delta, \quad q' = q\cos\delta - p\sin\delta, \quad r' = r + \sigma.$$

Рассмотрим свободное движение системы соосных тел переменной массы при отсутствии внешних сил $\left(\vec{R}^e = \vec{R}_1^e + \vec{R}_2^e = 0\right)$ и $\left(\vec{M}_O^e = 0\right)$. моментов. При выбранных предположениях выражение , определяющее теорему об изменении кинетического момента в поступательно движущихся осях *OXYZ*, запишется:

$$\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{2,O}}{dt}\right)_{Oxyz} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_{2,O} + \left[\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} - \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right)\right] +$$
$$+ \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_{1,O} = -\vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O.$$

Далее запишем выражение в проекциях на оси связанной с телом 2 системы координат *Oxyz*:

$$\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{p} + \left(C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t)\right)qr + C_1(t)q\sigma = -\left[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O\right]_x,$$
$$\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{q} + \left(A_2 + A_1(t) - C_2 - C_1(t)\right)pr - C_1(t)p\sigma = -\left[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O\right]_y,$$
$$C_2\dot{r} + C_1(t)\left(\dot{r} + \dot{\sigma}\right) = -\left[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O\right]_z.$$

Используя выражение и уравнения движения центров масс при отсутствии внешних сил и моментов в системе координат *Oxyz* можно записать:

$$\vec{\Phi}^R = m_1\vec{w}_{C_1}^{(e)} + m_2\vec{w}_{C_2}^{(e)} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{w}_O + \left(\vec{\varepsilon}_2 + \dot{\vec{\sigma}}\right)\times m_1\vec{\rho}_{C_1} + \left(\vec{\omega}_2 + \vec{\sigma}\right)\times\left(\vec{\omega}_2 + \vec{\sigma}\right)\times m_1\vec{\rho}_{C_1}$$
$$+\vec{\varepsilon}_2 \times m_2\vec{\rho}_{C_2} + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_2 \times m_2\vec{\rho}_{C_2} = m\vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_2 \times m\vec{\rho}_C + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_2 \times m\vec{\rho}_C + \dot{\vec{\sigma}} \times m_1\vec{\rho}_{C_1};$$
$$\vec{w}_O = \frac{1}{m}\left(\vec{\Phi}^R + \vec{R}^e - \vec{\varepsilon}_2 \times m\vec{\rho}_C - m\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C - \dot{\vec{\sigma}} \times m_1\vec{\rho}_{C_1}\right). \qquad (2.26)$$

Так как в рассматриваемом случае

$$\vec{\Phi}^R = \left(0,0,\Phi_z^R\right);\ \dot{\vec{\sigma}} \times m_1\vec{\rho}_{C_1} = 0;\ \vec{R}^e = 0;$$

$$\vec{\rho}_C \times \left(\vec{\omega}_2 \times \left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C\right)\right) = \vec{\rho}_C \times \vec{\omega}_2\left(p\rho_x + q\rho_y + r\rho_z\right); \quad \rho_{Cx} = \rho_{Cy} = 0;\ \rho_{Cz} = \rho_C,$$

то, вычисляя правые части выражений , в проекциях на оси *Oxyz* в матричном виде получим:

$$\left[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O\right] = -m\rho_C^2 \cdot \begin{bmatrix} \dot{p} - rq \\ \dot{q} + rp \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В последнем выражении проекция центра масс системы на продольную ось изменяется во времени, т.е. $\rho_c = \rho_c(t)$. С учетом записанного уравнения выше получим уравнения запишутся :

$$\left(A_2 + A_1(t) - m\rho_C^2(t)\right)\dot{p} + \left(C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t) + m\rho_C^2(t)\right)qr + C_1(t)q\sigma = 0,$$
$$\left(A_2 + A_1(t) - m\rho_C^2(t)\right)\dot{q} + \left(A_2 + A_1(t) - m\rho_C^2(t) - C_2 - C_1(t)\right)pr - C_1(t)p\sigma = 0,$$
$$C_2\dot{r} + C_1(t)\left(\dot{r} + \dot{\sigma}\right) = 0.$$

Простая модель движение спутника в магнитном поле земли

Магнитное поле Земли или геомагнитное поле — магнитное поле, генерируемое внутриземными источниками. Напряжённость магнитного поля (стандартное обозначение **H**) — векторная физическая величина.

Силовые линии магнитного поля земли

Пусть в начальный момент времени плоскость орбиты ортогональна оси диполя . Тогда в этот момент времени вектор геомагнитной напряженности H во всех точках орбиты ортогональна к ее плоскости , а изменения направления этого вектора при движении спутника по орбите будет, происходит лишь за счет вращения диполя вместе с Землей. Поэтому , когда период обращения спутника мал по сравнению с периодом вращения Земли , это изменения за время одного оборота спутника не велико. Из таких соображений можно рассматривать идеализированную задачу о вращении спутника в геомагнитном поле , вектор напряженности которого сохраняет постоянное направление. С другой стороны, такая задача является простейшим вариантом весьма сложной задачи о движении спутника около своего центра масс в геомагнитном поле, а ее рассмотрение позволяет понять некоторые особенности этого движения.

При моделировании же геомагнитного поля диполем, ось которого совпадает с осью вращения Земли , вектор H неизменен по направлению во всех точках орбиты и ортогонален к ее плоскости для экваториального спутника .Рассмотрим вращательное движение такого спутника .

Как известно при помещении намагниченного тела в магнитное поле напряженностью H на это тело будет действовать момент сил , определяемый формулой

$$M = I \times H$$

Где I магнитный момент сил, который возникает на спутнике как из-за наличие на нем функционирующих электрических систем и постоянных магнитов , так и из-за намагничивания материала , из которого изготовлен спутник , в частности материал его оболочки .

Движение будем рассматривать, используя правую геоцентрическую систему координат - $\bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z}$, ось $\bar{Z}$ совпадает с осью вращения земли. Главные центральные оси инерции спутника x,y,z и орбитальные $x_3\ y_3\ z_3$

имеют начало центр масс спутника. Ось z_3 направлена по радиус - вектору R центра масс, а ось y_3 - по нормали к орбите и вдоль вектора H в точке G.Положение спутника в орбитальной системе координат определим таблицей направляющих косинусов

	x	y	z
x_3	α_1	α_2	α_3
y_3	β_1	β_2	β_3
z_3	γ_1	γ_2	γ_3

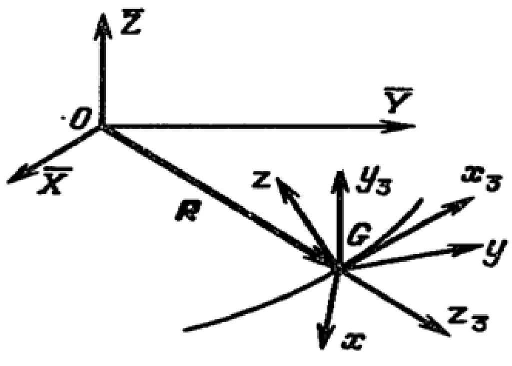
1.1Таблица направляющих косинусов

Напряженность геомагнитного пол в принятой модели имеет вид

$$H = \frac{\mu_e}{R^3} y_{3_0}$$

Где y_{3_0} -орт оси y_3 .

Будем считать что магнитный момент спутника равен постоянной составляющей I_0 а магнитным моментом оболочки $I_н$ и влиянием магнитного момента от вихревых токов здесь пренебрежем .



Система координат

Положение постоянного магнитного момента в теле спутника определим таблицей направляющих косинусов

	x	y	z
$\mathbf{I_0}$	η_1	η_2	η_3

Таблица направляющих косинусов для I_0

С учетом введенных моментов динамические уравнения Эйлера , описывающие вращения спутника , примут вид

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = I_0 H(\eta_2\beta_3 - \eta_3\beta_2)$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = I_0 H(\eta_3\beta_1 - \eta_1\beta_3)$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)qq = I_0 H(\eta_1\beta_2 - \eta_2\beta_1)$$

В частности, случай аналогичен случаю Эйлера, получится если $\mathrm{I}_0 = 0$. Динамически симметричный спутник с магнитным моментом, направленным по оси динамической симметрии , движется так же, как тяжелое твердое тело в случае Лагранжа .Если же магнитный момент лежит в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции спутника и A=B=2C , то спутник вокруг своего центра масс движется как тяжелое твердое тело в случае Ковалевской .

Движение космического аппарата в центральном поле тяготения

20.1. Определение моментов сил. Вывод уравнений движения и первых интегралов. Рассмотрим движение твердого тела объема V и массы M вокруг неподвижной точки O в поле сил, создаваемом гравитирующим центром O_1 (см. рис. 17). Такое поле сил называется *центральным ньютоновским полем*.

Поместим в точке O начало неподвижной системы координат $(Ox_1y_1z_1)$, ось Oz_1 которой направим по радиусу-вектору $\overrightarrow{O_1O}=\boldsymbol{R}$. Свяжем с твердым телом подвижную систему координат $Oxyz$, начало которой расположено в точке O, а оси направлены по главным осям инерции тела. Обозначим через $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор (с началом в точке O_1) произвольной точки тела. Выделим в теле частицу с массой dm и координатами x, y, z, радиус-вектор которой (с началом в точке O) есть $\boldsymbol{\rho}$. На эту частицу действует ньютоновская сила $d\boldsymbol{F}$:

$$d\boldsymbol{F} = -\frac{\lambda\, dm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad (20.1)$$

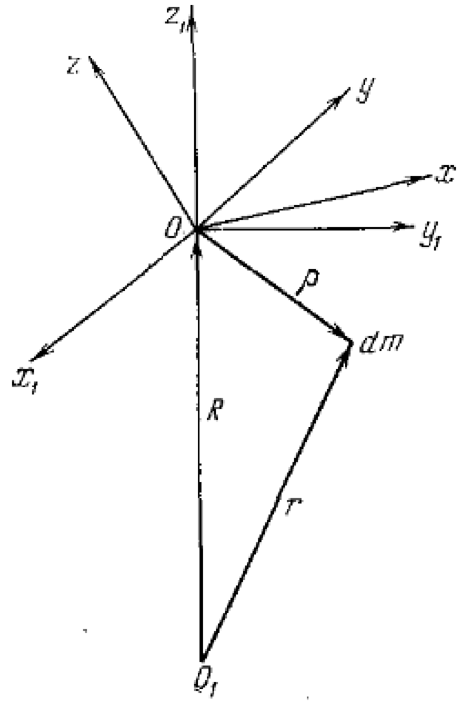


Рис. 17.

Силовая функция будет иметь вид

$$f=\lambda/r,$$

где λ — гравитационная постоянная.

Тогда силовая функция U ньютоновского поля сил, действующего на рассматриваемое твердое тело, будет

$$U=\int\limits_M f\, dm. \quad (20.3)$$

Обозначая через γ, γ', γ'' направляющие косинусы радиуса-вектора $\boldsymbol{R}$ в подвижной системе координат $(Oxyz)$, из соотношения $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\rho}$ получим

$$r^2=R^2+2R(x\gamma+y\gamma'+z\gamma'')+x^2+y^2+z^2. \quad (20.4)$$

Подставляя теперь это выражение в формулу (20.3) и заменяя dm на $\sigma(x, y, z)\,dV$, где $\sigma(x, y, z)$ — плотность твердого тела в точке (x, y, z), найдем выражение для U:

$$U = \lambda \iiint\limits_V \frac{\sigma(x, y, z)\,dV}{\sqrt{R^2 + 2R(x\gamma + y\gamma' + z\gamma'') + x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (20.5)$$

Используя проекции силы $d\boldsymbol{F}$ на подвижные оси

$$dF_x = \frac{df}{dr}\frac{R\gamma + x}{r}\,dm, \quad dF_y = \frac{df}{dr}\frac{R\gamma' + y}{r}\,dm,$$
$$dF_z = \frac{df}{dr}\frac{R\gamma'' + z}{r},$$

найдем элементарный момент $d\mathfrak{M} = \boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{F}$ этой силы относительно точки O с проекциями на те же оси

Используя проекции силы $d\boldsymbol{F}$ на подвижные оси

$$dF_x = \frac{df}{dr}\frac{R\gamma + x}{r}\,dm, \quad dF_y = \frac{df}{dr}\frac{R\gamma' + y}{r}\,dm,$$
$$dF_z = \frac{df}{dr}\frac{R\gamma'' + z}{r},$$

найдем элементарный момент $d\mathfrak{M} = \boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{F}$ этой силы относительно точки O с проекциями на те же оси

$$\left.\begin{aligned}
d\mathfrak{M}_x &= y\,dF_z - z\,dF_y = \frac{df}{dr}\frac{R}{r}(y\gamma'' - z\gamma')\,dm,\\
d\mathfrak{M}_y &= z\,dF_x - x\,dF_z = \frac{df}{dr}\frac{R}{r}(z\gamma - x\gamma'')\,dm,\\
d\mathfrak{M}_z &= x\,dF_y - y\,dF_x = \frac{df}{dr}\frac{R}{r}(x\gamma' - y\gamma)\,dm.
\end{aligned}\right\} \qquad (20.6)$$

Проекции моментов на подвижные оси

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}_x = \gamma''\frac{\partial U}{\partial \gamma'} - \gamma'\frac{\partial U}{\partial \gamma''}, \quad \mathfrak{M}_y = \gamma\frac{\partial U}{\partial \gamma''} - \gamma''\frac{\partial U}{\partial \gamma},\\
\mathfrak{M}_z = \gamma'\frac{\partial U}{\partial \gamma} - \gamma\frac{\partial U}{\partial \gamma'}.
\end{aligned}\right\}$$

Динамические и кинематические уравнения Эйлера для случая движения КА в плоском поле тяготения

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr&=\gamma''\frac{\partial U}{\partial\gamma'}-\gamma'\frac{\partial U}{\partial\gamma''},\\
B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,pr&=\gamma\frac{\partial U}{\partial\gamma''}-\gamma''\frac{\partial U}{\partial\gamma},\\
C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq&=\gamma'\frac{\partial U}{\partial\gamma}-\gamma\frac{\partial U}{\partial\gamma'},
\end{aligned}\right\}\qquad(20.9)$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma'',\quad \frac{d\gamma'}{dt}=p\gamma''-r\gamma,\quad \frac{d\gamma''}{dt}=q\gamma-p\gamma'.\qquad(20.10)$$

При составлении конспекта студентов использовалась следующая учебная литература:

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. М.: Наука, 1966. – 332 с.
2. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М. Наука 1977г. 328с.
3. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953. — 288 с.
4. Дорошин А.В. Динамика движения космических аппаратов переменного состава: Электронное учебное пособие / ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)», Самара, 2013.